УДК 62-50

А. М. Кадиев, В. И. Максимов

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВХОДА В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕПЯТСТВИЕМ *

1. Введение

В работе обсуждается проблема динамического восстановления входов для параболической задачи с препятствием. Приводятся два алгоритма решения этой задачи, устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений. Алгоритмы, ориентированные на компьютерную реализацию, позволяют осуществлять процесс решения в темпе «реального» времени. Они адаптивно учитывают неточные измерения фазовых траекторий и являются регуляризирующими в том смысле, что конечный результат тем лучше, чем точнее поступающая информация. В основе предлагаемых алгоритмов лежит метод вспомогательных позиционно-управляемых моделей. Основным элементом алгоритмов является процедура стабилизации некоторых вспомогательных функционалов типа Ляпунова.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная распределенная система вида

$$\begin{aligned}
&x_t(t,\eta) - \triangle_L x(t,\eta) = u(t,\eta) + F(t,\eta) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{п. в. на } [(t,\eta) \in T \times \Omega : x(t,\eta) > \mu(\eta)], \\
&x_t(t,\eta) = \max\{u(t,\eta) + F(t,\eta) + \triangle_L \mu(\eta), 0\} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{п. в. на } [(t,\eta) \in T \times \Omega : x(t,\eta) = \mu(\eta)], \\
&x(t,\eta) \geqslant \mu(\eta) \ \ \forall\, t \in T \ \text{ и п. в. } \eta \in \Omega,\ x = 0 \ \text{ п. в. на } T \times \Gamma, \\
&\mu \in H_2(\Omega), \quad \mu(\sigma) \leqslant 0 \ \text{ п. в. на } \Gamma.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $T = [0,\vartheta]$, $\vartheta < +\infty$; $\Omega \subset R^n$ — односвязная открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ; $\triangle_L$ – оператор Лапласа, т. е.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00059), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН № 13 «Математические методы в нелинейной динамике», Программы поддержки ведущих научных школ России НШ 7581.2006.1 и Урало-Сибирского интеграционного проекта.

© А. М. Кадиев, В. И. Максимов, 2006

$\Delta_L x(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \partial^2 x(\eta)/\partial\eta_j^2$; $F(t,\eta) \in L_2(T; L_2(\Omega))$ – известная функция; $u(t,\eta)$ – неизвестное возмущение. Система (1) описывает, например, процесс диффузии кислорода в поглощающей ткани. Подобная система, введенная и исследованная в работе [1], получила название «параболической задачи с препятствием» [2]. С позиций теории управления по принципу обратной связи задача с препятствием исследовалась, например, в работах [3; 4, § 3, гл. 3].

Обсуждаемая в настоящей работе задача состоит в следующем. В дискретные достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in T, \quad \tau_i = \tau_{i+1} + \delta, \quad i \in [1 : m-1], \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_m = \vartheta$$

замеряются (с ошибкой) фазовые состояния системы (1) –

$$x(\tau_i, \eta) = x(\tau_i; x_0, u(\cdot)) \in H = L_2(\Omega).$$

Здесь и ниже символ $x(\cdot; x_0, u^*(\cdot)) \in C(T; H)$ означает решение (1), отвечающее возмущению $u(\cdot) = u^*(\cdot)$. Как известно [2, следствие 4.4], при условии

$$x_0(\eta) \in H_1^0(\Omega), \quad x_0(\eta) \geqslant \mu(\eta) \text{ п. в. на } \Omega$$

(считаем в дальнейшем это условие выполненным) существует единственное решение задачи (1) со следующими свойствами:

$$[x(\cdot; x_0, u^*(\cdot)) \in L_2(T; H^2(\Omega)) \bigcap C(T; H_0^1(\Omega)),$$
$$x_t^0(\cdot; x_0, u^*(\cdot)) \in L_2(T; H).$$

Результаты измерений – элементы $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i) \in H$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_H \leqslant h, \quad i \in [0 : m-1], \tag{2}$$

где h – параметр точности измерения. Требуется указать алгоритм восстановления неизвестного входного воздействия $u^*(\cdot) \in L_2(T; U)$, порождающего неизвестный выход $x(\cdot)$, т. е. требуется найти $u^*(\cdot)$ такое, что отвечающее этому возмущению решение $x(\cdot; x_0, u^*(\cdot))$ совпадает с $x(\cdot)$. Такова содержательная постановка рассматриваемой в данной работе задачи.

Описанная задача относится к классу обратных задач и, в более общем контексте, к классу некорректных задач. Подобные задачи в апостериорной постановке исследовались многими авторами. В [5] был предложен метод динамического восстановления входа конечномерной динамической системы, аффинной по возмущению, в случае, когда задано множество $P \subset \mathbb{R}^m$ «мгновенных» ограничений на $u(t)$, т. е. $u(t) \in P$ при $t \in T$. Затем этот метод был развит в ряде работ (по поводу этих работ см. монографии [6, 4], а также обзорную статью [7], где приведены соответствующие ссылки) для систем, описываемых различными типами дифференциальных уравнений. Метод основывается на идеях теории позиционного управления (см. [8]) и известных в теории некорректных задач методах сглаживающего функционала и невязки (см. [9]). В настоящей работе метод динамической регуляризации применяется для восстановления правой части в параболической задаче с препятствием.

3. Описание метода решения задачи

Изложим основные конструкции используемого в настоящей работе метода решения рассматриваемой задачи, следуя [4–7].

Пусть $U(x(\cdot))$ – множество всех входов $u(\cdot) \in L_2(T;U)$, совместимых с $x(\cdot)$, т. е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_2(T;U) : x(\cdot; x_0, u(\cdot)) = x(\cdot)\},$$

Ξ_T – множество измерений, т. е. множество всех кусочно-постоянных функций $\xi(\cdot) : T \to Z$, $\Xi(x(\cdot), h)$ – множество всех h-точных результатов измерений, т. е. множество всех функций $\xi^h(\cdot) \in \Xi_T$, удовлетворяющих (2).

Вводится вспомогательная система M (называемая моделью). Траектория модели зависит от управления $v^h(\cdot)$ (подлежащего формированию). Эта траектория обозначается символом

$$w^h(\cdot) = w^h(\cdot; w_0^h, v^h(\cdot)) \in C(T;H).$$

Начальное состояние w_0^h модели выбирается по результату измерения ξ_0^h в начальный момент согласно правилу $\mathcal{W}_h$, фиксированному априори,

$$w_0^h = \mathcal{W}_h(\xi_0^h) \in X_0 \subset H. \tag{3}$$

Здесь X_0 – множество начальных состояний модели, которое мы предполагаем заданным. В частности, если начальное состояние x_0 известно, то естественно считать $X_0 = \{x_0\}$.

Правило выбора управления $v^h(\cdot)$ (при каждом $h \in (0,1)$) в модели отождествляется с парой $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$, где

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h} \tag{4}$$

есть разбиение отрезка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta$, $\delta = \delta(h)$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, $\mathcal{U}_h$ — отображение, ставящее в соответствие каждой тройке $(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i))$, $i \in [0 : m_h - 1]$, функцию

$$v^h_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) \in L_2([\tau_i, \tau_{i+1}]; U). \tag{5}$$

Здесь $\tau_i = \tau_{h,i}$, $w^h(\tau_i) = w^h(\tau_i; w_0^h, v^h(\cdot))$, $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$, символ $v_{a,b}(\cdot)$ означает сужение функции $v(\cdot)$ на полуинтервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Таким образом, четверка $(M, \mathcal{W}_h, \Delta_h, \mathcal{U}_h)$ для каждого $h \in (0,1)$ определяет некоторый алгоритм D_h на пространстве измерений ($D_h : \Xi_T \mapsto U_T$), формирующий выход $v^h(\cdot) = D_h\xi(\cdot)$ согласно принципу обратной связи (3)–(5). Этот алгоритм отождествляется с четверкой $(M, \mathcal{W}_h, \Delta_h, \mathcal{U}_h)$.

Пусть выполнено

Условие 1. *Множество $U_*(x(\cdot))$ всех входов минимальной $L_2(T;U)$-нормы, порождающих решение $x(\cdot)$, состоит из одного элемента:*

$$U_*(x(\cdot)) = \{u_*(\cdot; x(\cdot))\}.$$

Таким образом,

$$u_*(\cdot; x(\cdot)) = \arg\min\{|u(\cdot)|_{L_2(T;U)} : u(\cdot) \in U(x(\cdot))\}.$$

Семейство операторов D_h, $h \in (0,1)$, действующих из Ξ_T в U_T, называется *регуляризирующим,* если оно обладает следующим свойством:

$$\lim_{h\to 0} \sup\{|D_h\xi^h(\cdot) - u_*(\cdot; x(\cdot))|_{L_2(T;U)} : \xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)\} = 0.$$

Наша цель состоит в построении регуляризирующего семейства алгоритмов

$$D_h = (M, \mathcal{W}_h, \Delta_h, \mathcal{U}_h), \qquad h \in (0,1), \tag{6}$$

вида (3)–(5).

После того как модель M и ее начальное состояние (3) выбраны, работа алгоритма D_h осуществляется по следующей схеме. До начального момента $t_0 = 0$ фиксируются погрешность h, а также разбиение (4) $\Delta = \Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_i = \tau_{h,i}$) отрезка T. На i-м шаге алгоритма, осуществляемом на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала измеряется (с ошибкой) фазовое состояние $x(\tau_i)$, т. е. находится элемент $\xi_i^h \in H$ со свойством (2). Затем по правилу (5) определяется управление в модели. После этого вместо траектории $w^h(t)$, $t \in [t_0, \tau_i]$, формируется фазовая траектория $w^h(t)$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ (т. е. осуществляется корректировка памяти модели). Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Правило построения семейства алгоритмов D_h основано на теореме 1, приведенной ниже. Пусть на декартовом произведении $C(T;H) \times C(T;H)$ задан функционал $\Lambda^0(\cdot,\cdot)$.

Определение 1. [4] *Семейство D_h, $h \in (0,1)$, (6) позиционных алгоритмов моделирования называется Λ^0-устойчивым, если существуют функции*

$k_1(\cdot)$, $k_2(\cdot)$, $k_3(\cdot)$: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такие, что $k_1(h) \to 1$, $k_2(h) \to 0$, $k_3(h) \to 0$ при $h \to 0$, и для всякого измерения $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot),h)$ выполняются неравенства

$$|v^h(\cdot)|_{L_2(T;U)} \leqslant k_1(h)|u_*(\cdot;x(\cdot))|_{L_2(T;U)} + k_2(h), \tag{7}$$

$$\Lambda^0(x(\cdot),w^h(\cdot)) \leqslant k_3(h). \tag{8}$$

Здесь $v^h(\cdot) = D_h\xi^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$ – траектория модели, порожденная алгоритмом D_h и измерением $\xi^h(\cdot)$.

Теорема 1. [4] *Пусть семейство D_h позиционных алгоритмов моделирования* а) *Λ^0-устойчиво;* б) *для любых $h_k > 0$ ($h_k \to 0+$ при $k \to \infty$), $\xi^{h_k}(\cdot) \in \Xi(x(\cdot),h_k)$, $w^{h_k}(\cdot) = w^{h_k}(\cdot;w_0^{h_k},v^{h_k}(\cdot))$, $v^{h_k}(\cdot) = D_{h_k}\xi^{h_k}(\cdot)$, условия*

$$v^{h_k}(\cdot) \to v(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;U), \quad \Lambda^0(x(\cdot),w^{h_k}(\cdot)) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

влекут включение $v(\cdot) \in U(x(\cdot))$. Тогда семейство алгоритмов D_h, $h \in (0,1)$, является регуляризирующим.

4. Случай $u_*(\cdot;x(\cdot)) \in L_\infty(T;U)$

Сначала рассмотрим случай, когда управление $u_*(\cdot;x(\cdot))$ ограничено по существу, т. е. $u_*(\cdot;x(\cdot)) \in L_\infty(T;U)$. Пусть модель M описывается соотношениями

$$\begin{aligned} &w_t^h(t,\eta) - \triangle_L w^h(t,\eta) = v^h(t,\eta) + F(t,\eta) \\ &\qquad\qquad \text{п. в. на } [(t,\eta) \in T\times\Omega : w^h(t,\eta) > \mu(\eta)], \\ &w_t^h(t,\eta) = \max\{v^h(t,\eta) + F(t,\eta) + \triangle_L\mu(\eta), 0\} \\ &\qquad\qquad \text{п. в. на } [(t,\eta) \in T\times\Omega : w^h(t,\eta) = \mu(\eta)], \\ &w^h(t,\eta) \geqslant \mu(\eta)\ \ \forall\, t \in T \ \text{ и п. в. } \eta\in\Omega,\ w^h = 0 \text{ п. в. на } \Gamma\times T, \end{aligned} \tag{9}$$

т. е. в качестве модели нами взята «копия» системы (1). Фиксируем некоторое число $a > 0$ такое, что

$$x_0 \in X_0 = \{x \in H_1^0(\Omega) : |x|_H^2 + \varphi(x) \leqslant a < +\infty\}.$$

Здесь $\varphi(y)$ – индикаторная функция множества $K = \{y \in L_2(\Omega) : y(\eta) \geqslant \mu(\eta)$ при п. в. $\eta \in \Omega\}$, т. е. $\varphi(y) = 0$, если $y \in K$, $\varphi(y) = +\infty$ – в противном случае.

Возьмем семейство разбиений Δ_h отрезка T и функции $\alpha(h)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $d(h)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\alpha(h) \to 0, \quad \delta(h) \to 0, \quad d(h) \to +\infty,$$
$$d(h)(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad \alpha(h)d^2(h) \to 0 \text{ при } h \to 0+.$$

Замечание 1. Эти условия выполнены, например, если $\delta(h) \leqslant ch$, $\alpha(h) = c_1 h^{\gamma}$, $\gamma = 0.5 + \gamma_0$, $\gamma_0 = \mathrm{const} \in (0, 0.25)$, $d(h) = c_2 h^{-1/4}$, c, c_1, c_2 – положительные постоянные.

Правило выбора в начальный момент $t_0 = 0$ начального состояния модели $\mathcal{W}_h$ определим согласно (3), где положим

$$w_0^h \in B(\xi_0^h) = \{x \in X_0 : |\xi_0^h - x|_H \leqslant 2h\}. \tag{10}$$

Заметим, что из неравенства (2) и включения $x_0 \in X_0$ следует непустота множества $B(\xi_0^h)$.

Пусть закон выбора управления в модели $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$ задается формулами (4), (5), в которых

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = \arg\min\{\ell(\alpha, v, s_i) : v \in S(d(h))\}, \\ \ell(\alpha, v, s_i) = 2(s_i, Bv) + \alpha(h)|v|_U^2, \quad s_i = w^h(\tau_i) - \xi_i^h, \\ S(d(h)) = \{u \in U : |u|_U \leqslant d(h)\}. \end{gathered} \tag{11}$$

Введем функционал Λ^0 вида

$$\Lambda^0(x(\cdot), w^h(\cdot)) = |x(\cdot) - w^h(\cdot)|_{C(T;H)}.$$

Имеет место

Теорема 2. *Семейство позиционных алгоритмов моделирования D_h (6) вида (3)–(5), (10), (11) удовлетворяет условиям теоремы 1 и является регуляризирующим.*

Доказательство. Покажем, что семейство позиционных алгоритмов моделирования D_h (6) вида (3)–(5), (10), (11) является Λ^0-устойчивым. Для этого оценим изменение при $t \in T$ величины

$$\varepsilon_h(t) = |w^h(t) - x(t)|_H^2 + \alpha(h) \int_{t_0}^{t} \{|v^h(\tau)|_H^2 - |u_*(\tau)|_H^2\}\, d\tau.$$

Заметим, что система (1) эквивалентна включению (см. [2], с. 138–140)

$$\begin{gathered} x_t(t,\eta) - \triangle_L x(t,\eta) + \beta(x(t,\eta) - \mu(\eta)) - F(t,\eta) \ni u(t,\eta), \quad (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ x(t,\eta)|_\Gamma = 0, \quad t \in T, \quad x(t_0,\eta) = x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ \beta(r) = 0, \quad \text{если } r > 0, \\ \beta(0) = (-\infty, 0], \quad \beta(r) = \varnothing \quad \text{при } r < 0. \end{gathered} \tag{12}$$

В таком случае, учитывая монотонность отображения β, а также включения (9), (12), получаем неравенство

$$1/2d|\mu^h(t)|^2_H/dt \leqslant (u_*(t) - v^h(t), \mu^h(t)), \tag{13}$$

справедливое при п. в. $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, здесь $\mu^h(t) = x(t) - w^h(t)$. Легко видеть, что при $t \in \delta_i$ также верна оценка

$$(w^h(\tau_i) - \xi^h_i, \mu^h(t)) \leqslant k_* \left(h + \int_{\tau_i}^t \{|w^h_\tau(\tau)|_H + |x_\tau(\tau)|_H\}\, d\tau\right) |\mu^h(t)|_H - |\mu^h(t)|^2_H. \tag{14}$$

В таком случае при п. в. $t \in \delta_i$ имеем

$$1/2d|\mu^h(t)|^2_H/dt \leqslant (u_*(t) - v^h(t), \xi^h_i - w^h(\tau_i)) + \rho_i(t, h, \delta). \tag{15}$$

Здесь

$$\rho_i(t, h, \delta) = k_1 \left(h + \int_{\tau_i}^t \{|w^h_\tau(\tau)|_H + |x_\tau(\tau)|_H\}\, d\tau\right).$$

Пусть число $h_* > 0$ таково, что $d(h) > Q = |u_*(\cdot)|_{L_\infty(T;U)}$ при $h \in (0, h_*)$.

Учитывая правило определения управления $v^h(\cdot)$, при $h \in (0, h_*)$ будем иметь

$$\varepsilon_h(t) \leqslant \varepsilon(\tau_i) + 2(t - \tau_i)\rho_i(t, h, \delta), \quad t \in \delta_i.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(t) &\leqslant \varepsilon_h(0) + k_*\{h\vartheta + \delta(h)\sqrt{\vartheta}(|w^h_t(\cdot)|_{L_2(T;H)} + |x_t(\cdot)|_{L_2(T;H)})\} \leqslant \\ &\leqslant k_0(1 + d(h))(h + \delta(h)), \quad t \in T. \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, справедливы неравенства (7), (8), в которых

$$\begin{aligned} k_2(h) &= k_0(\alpha^{-1}(h)(1 + d(h))(h + \delta(h)))^{1/2}, \\ k_3(h) &= k_0(1 + d(h))(h + \delta(h)) + \alpha(h)c(1 + d^2(h)), \end{aligned}$$

постоянные k_0 и c не зависят от h и могут быть выписаны в явном виде. Следовательно, семейство D_h является Λ^0-устойчивым. Нетрудно видеть, что условие «б» теоремы 1 выполнено, если

$$y(\cdot) = x(\cdot), \tag{17}$$

где $y(\cdot) = x(\cdot; x_0, v(\cdot))$, $v^{h_k}(\cdot) \to v(\cdot)$ слабо в $L_2(T; U)$ при $k \to \infty$. Проверим справедливость (17). Заметим, что имеет место сходимость

$$|x(\cdot) - w^{h_k}(\cdot)|_{C(T;H)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{18}$$

если $h_k \to 0$ при $k \to \infty$. Здесь $w^{h_k}(\cdot) = w^{h_k}(\cdot; \xi_0^{h_k}, v^{h_k}(\cdot))$ — решение (9) при $h = h_k$, $v^{h_k}(\cdot) = D_{h_k}(\xi^{h_k}(\cdot))$. Кроме того, верно неравенство

$$|y(t) - w^{h_k}(t)|_H^2 \leqslant 2 \int_0^t (v(\tau) - v^{h_k}(\tau), y(\tau) - w^{h_k}(\tau))\, d\tau. \tag{19}$$

Учитывая (18), (19), сходимость h_k к 0 и слабую сходимость управлений $v^{h_k}(\cdot)$ к $v(\cdot)$ в $L_2(T; U)$ при $k \to \infty$, будем иметь

$$|y(\cdot) - w^{h_k}(\cdot)|_{C(T;H)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Следовательно, равенство (17) имеет место. Утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1.

5. Случай $u_*(\cdot; x(\cdot)) \in L_2(T; U)$

Рассмотрим случай, когда управление $u_*(\cdot; x(\cdot))$ является функцией, суммируемой с квадратом, т. е. $u_*(\cdot; x(\cdot)) \in L_2(T; U)$.

В качестве модели M возьмем снова систему (9). Правило выбора начального состояния модели $\mathcal{W}_h$ зададим соотношениями (3), (10), а закон выбора управления в модели $\mathcal{S}_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$ — формулами (4), (5), в которых теперь положим

$$\mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = v_i^h = \arg\min\{\ell(\alpha, v, s_i) : v \in U\},$$
$$s_i = w^h(\tau_i) - \xi_i^h,$$

т. е.

$$v_i^h = -\alpha^{-1} s_i. \tag{20}$$

Пусть семейство разбиений Δ_h отрезка T и функция $\alpha(h)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ обладают следующими свойствами:

$$h\delta^{-1}(h) \leqslant C, \quad \delta(h)\alpha^{-2}(h) \leqslant C, \quad \alpha(h) \to 0, \quad \delta(h) \to 0,$$
$$(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad \text{при } h \to 0+.$$

Здесь $C = \text{const} > 0$ – постоянная, не зависящая от h.

Теорема 3. *Семейство позиционных алгоритмов моделирования* D_h (6) *вида* (4), (5), (10), (20) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и является регуляризирующим.*

Доказательство теоремы 3 проводится по схеме доказательства теоремы 2.

Литература

1. Magenes E. Some typical free boundary problems // Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations. 1977. P. 239–312.

2. Barbu V. Optimal control of variational inequalities // Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program. L., 1984.

3. Blizorukova M. S., Maksimov V. I. On a robust control of parabolic obstacle problem // Physics and Control: Proc. Intern. Conf. St. Petersburg, 2003.

4. Максимов В. И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.

5. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 29–41.

6. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. L.: Gordon and Breach, 1995.

7. Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И. Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 579–597.

8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984.

9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.